

Uma forma diferente de praticar Matemática!

O presente opúsculo representa o esforço de apresentar as linhas gerais da Modelagem Matemática, seu campo conceitual, suas etapas e consequências para uma educação significativa, envolvente e eficaz.

A abordagem desenvolvida no texto enfatiza que a Modelagem Matemática é capaz de contribuir significativamente para desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas de várias maneiras, tais como uma melhor compreensão dos problemas do mundo real, a habilidade de identificar e formular problemas matemáticos, o desenvolvimento de estratégias para a resolução eficaz e a avaliação crítica da validade das soluções obtidas por meio da aplicação de conceitos matemáticos.

Aproveite o material. No seu interior é apresentada algumas sugestões de sequências didáticas para um estímulo introdutório da Modelagem Matemática em sala de aula.

Bom estudo!

INICIAÇÃO À MODELAGEM MATEMÁTICA

aplicada a resolução de problemas

AUTOR

LUCAS EMANUEL PEREIRA

2023



BIOGRAFIA

Professor de matemática desde 2007, possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás - UEG (2010), especialização em Docência Universitária pela Faculdade Católica de Anápolis - FCA (2015).

Contato: emmanuelueg@gmail.com

Curriculo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0573159538753016>



BIBLIOGRAFIA

ALMEIDA, L. M. W. **Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise.** Zetetiké, Campinas, v. 18, número temático, 2010.

ALMEIDA, Lourdes & DA SILVA, Karina. (2015). **The Meaning of the Problem in a Mathematical Modelling Activity.** In: Stillman, G., Blum, W., Salett Biembengut, M. (eds) Mathematical Modelling in Education Research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_3>. Acesso em janeiro de 2022.

BARBOSA, J. C. (2001). **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico.** In: 24ª RA da ANPED, Anais... Caxambu.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem Matemática: uma nova estratégia.** 4. ed., 2ª reimpressão. - São Paulo: Contexto, 2021.

BIEMBENGUT, M. S. (1990). **Modelagem matemática como método de ensino aprendizagem de matemática em cursos de 1º e 2º graus.** Dissertação de Mestrado. Rio Claro, Unesp.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem & implicações no ensino e na aprendizagem de matemática.** 2. ed. Blumenau: Edifurb, 2004.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino.** 4ª ed. São Paulo. 2005.

BIEMBENGUT, M. S. **30 anos de Modelagem Matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais.** Tutuandria, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BLUM, W. **ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document.** *Educational Studies in Mathematics* 51, 149–171 (2002). Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1022435827400>>. Acesso em agosto de 2022.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática na 5ª série.** Rio Claro-SP, 1987. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – IGCE, Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho –UNESP, 1987.

BURAK, D. (2004). **A modelagem matemática e a sala de aula.** In: I ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – I EPMEM. Anais ... Londrina.

BURAK, Dionisio; ARAGÃO, R. M. R. **A modelagem Matemática e relações com a aprendizagem significativa.** Dionisio Burak, Rosália Maria Ribeiro de Aragão. - 1.ed. - Curitiba, PR: CRV, 2012. 129 p.

D' AMBRÓSIO, U. **Matemática e desenvolvimento.** In: **Da realidade a ação: reflexões sobre educação e Matemática.** 1 ed. São Paulo: Summus, 1986. P. 13-25.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT (OECD). **Brazil - Country Note - PISA 2018 Results.** OECD 2019, Volumes I-III. Disponível em: <https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_BRA.pdf>.

Práticas como a MM, devem ser construídas a quatro mãos, com a participação colaborativa dos alunos e a ideia de que a Matemática é uma ferramenta extraordinária, uma cultura humana legada desde a antiguidade que possibilitou o desenvolvimento de quase tudo que conhecemos hoje.

Com a MM, os alunos podem revelar uma sensação maior de confiança na aprendizagem da matemática, considerada por eles, quase sempre, muito técnica, por envolver uma cognição sofisticada, com consequências impactantes para o mundo do trabalho, para o mundo da ciência, para o mundo da cultura.

É fundamental criar meios de oportunizar o uso de pedagogias centradas no aluno na cultura escolar, como é o caso da Modelagem Matemática. Esta se revela ferramenta eficaz na ampliação da proficiência em Matemática, devido a sua abordagem reflexiva sobre a realidade. Conforme descrito por D'Ambrósio (1986), essa abordagem resulta em uma ação planejada, consciente, desencadeada pela construção de modelos nos quais o aluno opera, utilizando toda sua experiência, conhecimento acumulado e recursos naturais.

Propiciar um ambiente de aprendizagem que mobilize a cognição dos alunos na construção do conhecimento matemático, em vez da mera memorização de padrões e funções prontas, sem pesquisa dedutiva e diálogo. Conforme argumenta Burak (1987), a Matemática é melhor aprendida por meio da ação, construção de modelos matemáticos e esforços dedicados ao seu aperfeiçoamento, proporcionando uma compreensão matemática mais profunda da realidade.



INICIAÇÃO À MODELAGEM MATEMÁTICA

aplicada a resolução de problemas

AUTOR

LUCAS EMANUEL PEREIRA



EXPEDIENTE TÉCNICO:

© Autor – 2023

Diagramação: Lucas Emanuel.

Imagens: bancos de imagens pexels.com; support.freepik.com e flaticon.com.

FIXA CATALOGRÁFICA:

Universidade Estadual de Goiás
Biblioteca do Câmpus Central – Sede: Anápolis – CET

P436i Pereira, Lucas Emanuel.

Iniciação à Modelagem matemática : aplicada a resolução de problemas / Lucas Emanuel Pereira. – Anápolis-GO, 2023.
30 f. il.

Produto Educacional integrante da Dissertação: Contribuições da modelagem matemática para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas no ensino médio (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) - Campus Central – Sede: Anápolis – CET, Universidade Estadual de Goiás – UEG, 2023.
Orientador: Prof. Dr. Roberto Barcelos de Souza.

1. Ensino de Ciências 2. Ensino da matemática 3. Modelagem matemática. I. Roberto Barcelos de Souza(Orient.) II. Título.

37:5

Elaborado por Sandra Alves Barbosa – Bibliotecária – CRB 1 / 2659

- Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema

Introdução ao modelo matemático:

Os alunos poderão encontrar modelos utilizados no Brasil, nos Estados Unidos e na Europa que são utilizados como referência na indústria de calçados para padronização de números.

Experimento prático e coleta de dados:

Nessa fase os alunos podem tirar medidas uns dos outros para coletar informações que permitam analisar o desempenho do modelo pesquisado. Podem utilizar a regra matemática (modelo) encontrada na pesquisa para estimar o número do calçado a partir da metragem (cm) do pé.

- Avaliação da atividade:

A avaliação deve levar em consideração a criatividade e autonomia dos alunos na realização da atividade. Também deve ser considerado na avaliação a capacidade dos alunos de aplicar o modelo matemático para estimar o número do calçado a partir da medida do pé.

Objetivo:

- Aplicar um modelo matemático para estimar o número do calçado, a partir da medida do comprimento do pé.

Conteúdos envolvidos:

- Grandezas e medidas;
- Estatística;

Recursos didáticos:

- Fita de medir (em cm);
- Numeração do calçado de cada aluno.

Etapas da modelagem para desenvolvimento da atividade:

Escolha do tema: Relação matemática entre Tamanho do Pé e Número do Calçado.

Muitas escolas públicas participam de programas de governo de distribuição de uniformes e calçados aos alunos no limiar do ano letivo. Um dos maiores para os alunos desafios é comportar o tamanho do pé ao número do calçado disponível. Nem sempre o tamanho do pé é compatível com a numeração de costume que eles se calçam. Essa situação pode gerar um debate interessante sobre como a indústria brasileira realiza a formatação dos calçados de acordo com o tamanho do pé de cada brasileiro, formalizado o contexto do problema: *existe uma forma calcular o número do calçado baseado no tamanho do comprimento do pé?*

• **Pesquisa exploratória**

Para pesquisar melhor sobre o tema, os alunos podem conversar com sapateiros, pesquisar na internet manuais de calçados, entrevistar um especialista ou visitar uma empresa de calçados.

• **Levantamento dos problemas**

Após a pesquisa exploratória entre os profissionais da reforma de calçados, concluída uma sondagem na internet sobre o tema, os alunos devem realizar uma fala conclusiva em torno da delimitação do problema: *fórmulas (modelos algébricos) matemáticas propostos na internet (sites informativos, questões de vestibular, páginas de curiosidade) são exatos no resultado ao relacionar a medida do pé em relação à numeração do calçado?*

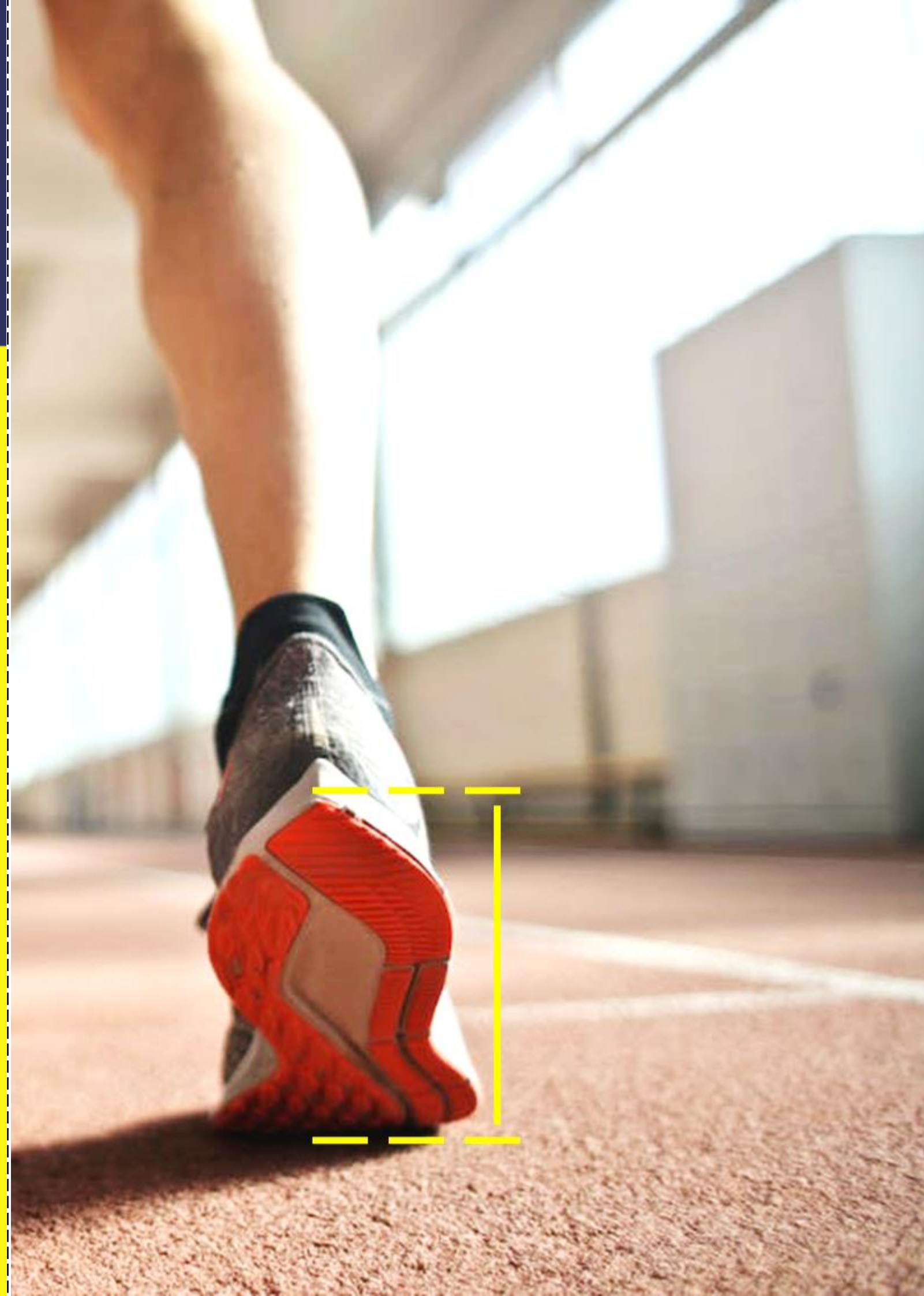
“[...] o verdadeiro espírito da Matemática é a capacidade de modelar situações reais, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em outro contexto, novo”

(D’AMBROSIO, 1986, p. 44).



SUMÁRIO

1	APRESENTAÇÃO.....	06
2	AFINAL, DO QUE ESTAMOS FALANDO?	08
3	O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA?.....	10
4	QUAIS SÃO AS ETAPAS DA MODELAGEM MATEMÁTICA?	12
5	UM ESTUDO DE CASO.....	16
6	SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS EM MODELAGEM MATEMÁTICA.....	18
7	CONCLUSÃO.....	40



ATIVIDADE 5

O segredo do número do calçado.

SEJA BEM VINDO PROFESSOR!

O presente opúsculo apresenta os passos iniciais da Modelagem Matemática (MM), uma metodologia promissora para o ensino da Matemática. Seus princípios e técnicas dialogam com a essência de outras metodologias ativas, que colocam o aluno no centro do processo de aprendizagem.

Aqui apresentamos linhas gerais sobre MM além da sequência didática de atividades aplicadas com alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública em Anápolis-GO. Este produto é o resultado de uma pesquisa desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional da UEG em 2023, adotando uma abordagem qualitativa.

Aproveite as sugestões e mãos à obra!



Olá querido leitor!

Seja bem vindo a este produto educacional. Ele será uma ponte de diálogo entre nós e você em torno da Modelagem Matemática (MM). Ele é resultado de uma pesquisa que investigou a contribuição da MM para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas no Ensino Médio. A condução dessa pesquisa teve lugar em uma instituição de Ensino Médio em Anápolis-GO proporcionando uma análise aprofundada do impacto da Modelagem Matemática no contexto educacional local.

O problema persistente do baixo desempenho dos alunos brasileiros em avaliações externas destaca-se como uma preocupação constante na educação do país. Neste contexto, a MM surge como uma metodologia promissora para o ensino da Matemática, pois pode efetivamente contribuir para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, tão essenciais para a formação do cidadão.

O propósito da pesquisa consistiu em investigar as contribuições dessas habilidades, envolvendo a identificação de problemas, a formulação ou manipulação de modelos, a aplicação de conceitos matemáticos e a avaliação de soluções. Para alcançar esse objetivo, atividades de Modelagem Matemática (MM) foram implementadas junto aos alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Os resultados das atividades foram avaliados por meio de questionários e entrevistas com os alunos. Esses achados evidenciaram que a Modelagem Matemática (MM), se bem planejada e aplicada seguindo bases teóricas, pode contribuir para o desenvolvimento das mencionadas anteriormente.



- Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema

Introdução ao modelo matemático:

Após debate entre eles, com mediação do professor, os alunos podem compulsar documentos oficiais de normatização de construções internas, como a norma NBR 9050 da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Utilizarem a regra matemática dada pela ABNT (2004) encontrada na etapa exploratória da atividade para estimar o coeficiente de inclinação das rampas e determinar se estão dentro do padrão de acessibilidade dos documentos regulatórios..

Experimento prático e coleta de dados:

No local selecionado os alunos devem realizar as medições com fim de coletar dados de forma segura para posterior aplicação do modelo matemático selecionado.

Aplicação do modelo aos dados coletados:

O modelo matemático para o cálculo da inclinação é dado pela norma da NBR 9050 da ABNT. Os alunos deve ser estimulados a pesquisar esse e outros modelos-referência, assim como, realizar a interpretação matemática de sua construção, com uso das relações trigonométricas aprendidas durante o programa escolar.

- Avaliação da atividade:

Descrição:

A avaliação deve levar em consideração a capacidade dos alunos de aplicar o modelo matemático selecionado para calcular o coeficiente de inclinação das rampas. Deve-se usar como referência as reuniões de planejamento e os registros de cálculo.

Objetivo:

- Construir e aplicar um modelo matemático para verificar a acessibilidade das rampas da escola, seguindo as normas da ABNT, desenvolvendo habilidades de modelagem matemática e promovendo a autonomia e a criatividade dos alunos.

Conteúdos envolvidos:

- Trigonometria;
- Medidas de inclinação;
- Proporcionalidade

Recursos didáticos:

- Apenas uma fita de medir;

Etapas da modelagem para desenvolvimento da atividade:

- **Escolha do tema:** Verificação da acessibilidade das rampas da escola de acordo com as normas da ABNT.

Geralmente, escolas possuem rampas de acesso de cadeirantes a todos os ambientes da escola. Nas discussões realizadas pelos alunos pode-se colocar a questão do grau de inclinação das rampas, se existe um limite regulamentado de inclinação. Os alunos podem usar a atividade para confirmar se a construção das rampas da seguem uma norma padrão que garanta a facilidade de tráfego pelos alunos cadeirantes.

- **Pesquisa exploratória**

Para pesquisar melhor sobre o tema, os alunos devem analisar as rampas da escola, tomando medidas e discutindo com a coordenação, quando e como foram planejadas e confirmar se a construção do modelo da rampa seguiu apenas a altura do calçamento ou se houve uma preocupação técnica com a seu coeficiente de inclinação e normatização.

- **Levantamento dos problemas**

Após a pesquisa exploratória entre os profissionais da escola, os alunos devem organizar uma fala conclusiva em torno do tema das rampas e afim de delimitarem o problema da exploração: *como determinar um coeficiente de inclinação das rampas que sejam adequados a acessibilidade dos alunos cadeirantes?*

Observou-se que a MM também auxilia na compreensão de problemas do mundo real, formulação de problemas matemáticos, desenvolvimento de estratégias para resolvê-los e avaliação da validade das soluções encontradas pela aplicação de conceitos e técnicas matemáticas.

Além disso, a MM pode impulsionar a motivação dos alunos para estudar Matemática, promover o pensamento crítico e a compreensão de conceitos matemáticos. O propósito ao oferecer esse produto educacional é apresentar a MM como uma estratégia eficaz para o ensino de Matemática no Ensino Médio.

Os professores podem incorporar a MM em suas aulas de várias formas, como através de atividades que guiam os alunos no desenvolver estratégias para resolver problemas seguindo as etapas da Modelagem proposta por Burak (1987; 1992).

Ao longo dos capítulos, apresentamos sequências didáticas de algumas das atividades aplicadas durante a pesquisa, proporcionando uma visão prática e aplicada do uso da Modelagem Matemática em sala de aula.

Boa leitura!



UMA FERRAMENTA PODEROSA PARA ENTENDER O MUNDO

A Matemática é um instrumento relevante para a compreensão e investigação científica do mundo que nos cerca, proporcionando forte desenvolvimento das capacidades racionais e intelectuais. Sua relevância cultural e social perpassa uma trajetória histórica milenar desde o berço da civilização, a revolução neolítica, a aurora das primeiras navegações ultramarinas, a constituição da sociedade industrial, até a atualidade das cidades inteligentes, dos ecossistemas de negócios digitais, do espaço coletivo e virtual compartilhado, da aeronavegação espacial e dos grandes avanços científicos hodiernos.

E apesar de sua relevância na sociedade e na formação escolar do alunado como componente curricular, dados de Avaliações Externas aplicadas pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), evidenciam um cenário brasileiro de uma década (2005-2015) com médias de proficiência em Matemática em nível básico no Brasil e abaixo do básico em certas regiões do país, arguindo sérias dificuldades dos estudantes na aprendizagem de Matemática (BRASIL, 2018). Essas dados indicaram uma lacuna metodológica frente as demandas do aluno do séc. 21, marcado por ser midiático, difuso, eclético, dinâmico. A MM destaca-se como uma abordagem que ofereça uma resposta mais alinhada às necessidades do estudante contemporâneo.



ATIVIDADE 4

As rampas em lugares públicos: um desafio de inclusão.

Desde os primeiros modelos desenvolvidos na Grécia Antiga, como o geocentrismo ptolomaico (a fim de explicar o movimento dos astros e a estrutura do universo), das primeiras modelações de classes de curvas como as de Apolônio de Perga (importante cidade da Panfília), do Teorema de Pitágoras até as modelações atuais na análise de estruturas, nas máquinas e sistemas telemáticos, na economia, na otimização de processos e tomada de decisões estratégicas, a MM representou um recurso eficiente de compreensão, explicação e predição de fenômenos naturais, sociais e lógicos.

Na educação, a MM ganhou estudos que reconheceram seu contorno de metodologia de ensino ativa a partir da década de 1980. Para alguns autores (Burak e Aragão, 2012; Bassanezi 2002; 2021) a MM se encaixa bem como uma abordagem de ensino-aprendizagem na contramão das abordagens expositivas pois gera, por meio de suas práticas (atividades, projetos, jogos, sequências didáticas) a construção de significados, ao desafiar o aluno a aplicar conceitos matemáticos para resolver problemas.

Portanto, é desejoso um Ensino Médio com metodologias de ensino ativas baseadas nas habilidades do século 21 formuladas pela OECD: pensamento crítico; criatividade; pesquisa e inquérito; autodireção, iniciativa e persistência; uso da informação; sistemas a pensar; comunicação; e reflexão (OECD, 2018). Metodologias que favorecem fortemente o desenvolvimento cognitivo e a construção do conhecimento Matemático mais contextualizado com a realidade do aluno.

O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA?

Muitos autores como Almeida (2010), Barbosa (2001), Bassanezi (2021), Biembengut (1999; 2016) e D' Ambrosio (1986) apresentam a Modelagem como um caminho alternativo ao ensino tradicional. Mas o que é, de fato, essa tal de Modelagem? Vejamos um passo a passo:



01

O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA?

A Modelagem Matemática é a arte de representar o mundo real por meio de equações, gráficos e simulações matemáticas. Ela nos permite traduzir problemas complexos em linguagem matemática para entender, analisar e resolver questões do mundo real.

02

QUANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA?

Com uma longa história que remonta as civilizações egípcias e babilônicas no uso da matemática para resolver problemas práticos, como a medição de terras e a previsão de eventos astronômicos, o termo "modelagem matemática" começou a ganhar seu sentido moderno destaque durante a Revolução Científica do século XVII.



- Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema

Introdução ao modelo matemático:

Essa fase demanda uma revisão detalhada de técnicas matemáticas voltadas para a medição de distâncias, centradas no triângulo, como as relações métricas do triângulo retângulo, a trigonometria básica e a semelhança entre triângulos. Após a revisão, a etapa deve ter um momento complementar para um alinhamento de técnicas que permitam, num primeiro momento, a modelagem geométrica e, em um segundo momento, a modelagem algébrica, aplicáveis ao problema levantado pelos alunos.

Experimento prático e coleta de dados:

Após algumas aulas focadas no planejamento de estratégias para coleta de dados, os alunos devem sair à campo. Realizaram medições em torres, postes, caixa d'água, utilizando pedras e um transferidor improvisado na forma de teodolito.

Aplicação do modelo aos dados coletados:

Após a coleta de dados, em sala de aula, os alunos devem ser direcionados a aplicação dos modelos formalizados. Essa etapa é a mais complexa porque envolve uma perícia na manipulação do cálculo e demanda tempo para um estudo mais detalhado sobre o contraste dos dados aplicados entre os diferentes modelos.

- Avaliação da atividade:

A avaliação da atividade deve ser realizada de forma contínua, ao longo da atividade, e por meio do *feedback* dos alunos, registro de cálculo, trabalho em equipe e estratégias planejadas e quais foram executadas.

Desafios na aplicação

Entre os desafios gerais que muitos alunos enfrentam nessa atividades, está a rotina hermetizada da escola, que pode não abrir muito espaço para atividades que envolvem a saída do ambiente da escola, para a exploração de um campo extraescolar. Nesse caso deve-se apresentar um plano detalhado, com horários agendados. Caso não haja negociação, pode-se explorar o ambiente dentro da escola.

Objetivo:

- Construir e aplicar modelos matemáticos da trigonometria para estimar a altura de uma caixa d'água e de uma torre, desenvolvendo habilidades de modelagem matemática e promovendo a autonomia e a criatividade dos alunos.

Conteúdos envolvidos:

- Trigonometria;
- Medidas de inclinação;
- Proporcionalidade.

Recursos didáticos:

- Teodolito caseiro à base de um transferidor;
- Trena à laser.

Etapas da modelagem para desenvolvimento da atividade:

- **Escolha do tema:** Estimativa de alturas inacessíveis usando modelos trigonométricos.

Durante a do diálogo, os alunos devem apontar a possibilidade de utilizar as técnicas e ferramentas matemáticas aprendidas em sala de aula para algum tipo de problema que envolvesse o próprio ambiente escolar, seja a área de horta, seja a quadra, seja as rampas que compõem o ambiente de acesso da escola, seja algumas árvores, ou seja a torre da caixa d'água, que se destaca a longa distância pela sua altura e pela sua característica ou algum prédio referencial no bairro onde moram como uma igreja, condomínio ou *shopping*.

- **Pesquisa exploratória**

Nessa etapa da atividade os alunos são estimulados pelo professor a realizarem uma pesquisa bibliográfica em livros didáticos, artigos científicos ou dissertações monográficas que tratem sobre a medição de alturas utilizando técnicas matemática consagradas pela literatura de obras raras. Pode-se pesquisar referências envolvendo o Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos e algumas relações trigonométricas como técnica matemática para medição de alturas inacessíveis.

03

**PARA QUE A
MODELAGEM
MATEMÁTICA?**

Com amplo alcance em várias áreas, é essencial para resolver problemas do mundo real de maneira eficiente e precisa: descreve e simula fenômenos naturais, como o crescimento de populações, a propagação de doenças e os movimentos planetários. Prevê tendências financeiras, otimiza cadeias de suprimentos, ajuda no desenvolvimento de medicamentos e a otimização de sistemas de transporte.



04

**COMO A MODELAGEM
MATEMÁTICA CONTRIBUI
PARA O ENSINO?**

Conectando conceitos abstratos a situações reais, tornando a matemática mais relevante e envolvente para os alunos. Enfim, ajudando os estudantes a desenvolver habilidades de resolução de problemas, raciocínio lógico e pensamento crítico.



A Modelagem Matemática é um caminho educacional plausível, moderno, dinâmico e interconectado com o mundo plural em que os alunos vivem. Um caminho teórico consistente permeado de técnicas extremamente relevante para uma educação voltada para o século 21.

4

QUAIS SÃO AS ETAPAS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

etapa 1

Escolha livre do tema

O estudante realiza uma escolha independente de um tema de seu interesse, podendo este estar associado a um hobby, interesse pessoal ou evento contemporâneo.

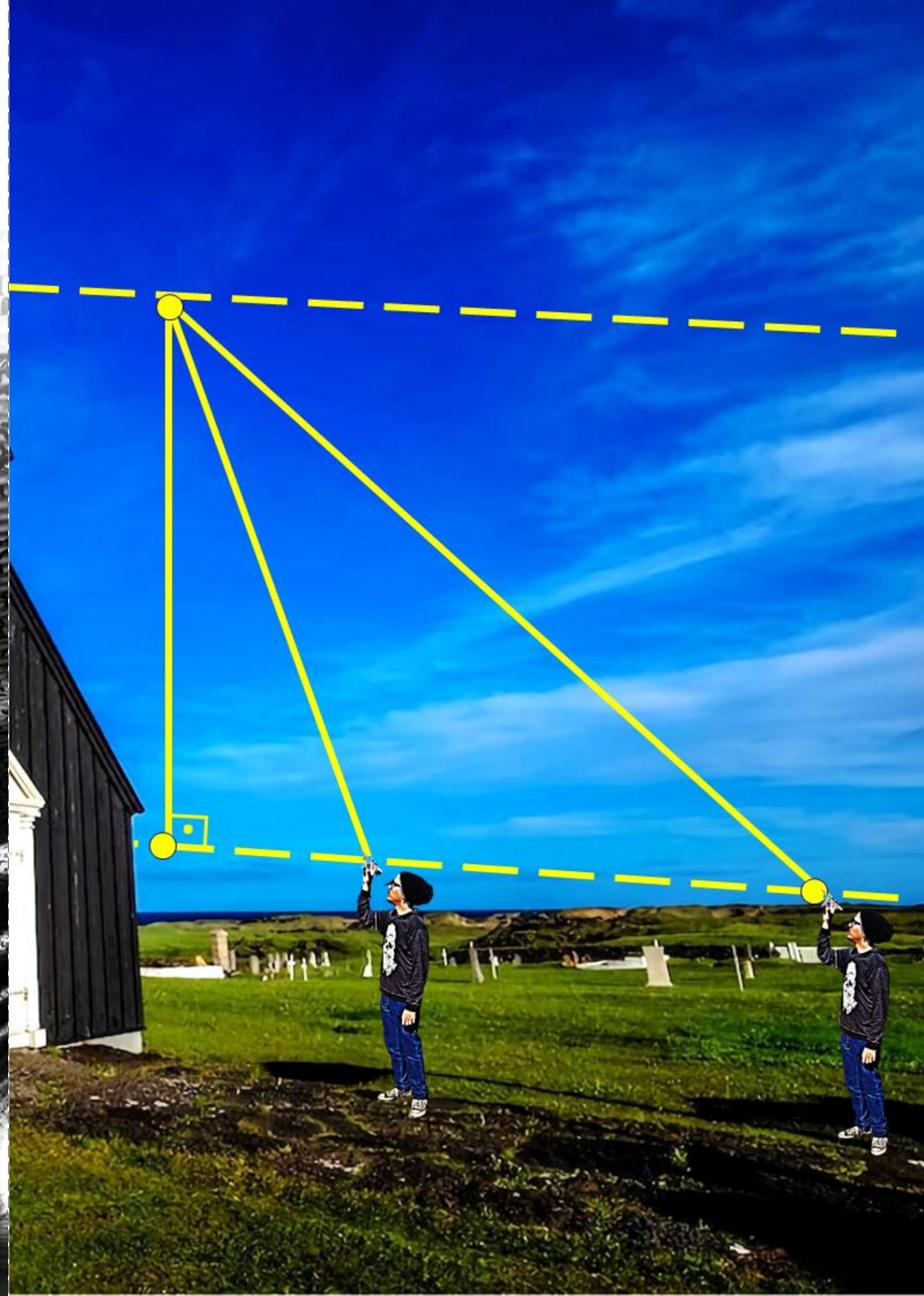
etapa 2

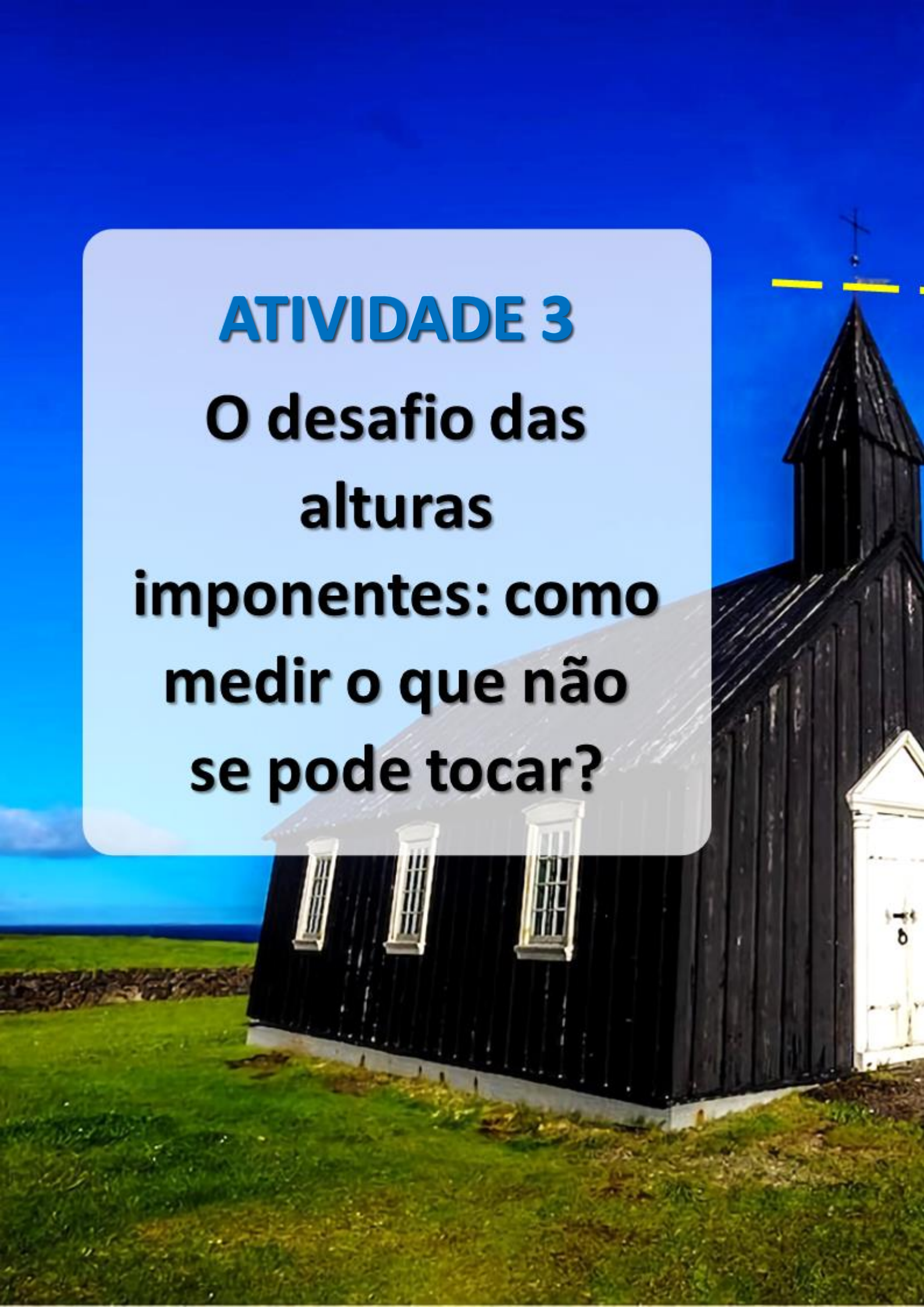
Pesquisa exploratória

Realiza-se uma pesquisa exploratória para aprofundar o entendimento sobre o tema escolhido. O aluno pode se dedicar à leitura de obras, artigos, consulta a sites especializados ou dialogar com especialistas.



Dr. Dionízio Burak (1987; 1992)





ATIVIDADE 3

O desafio das alturas imponentes: como medir o que não se pode tocar?

etapa
3

Levantamento dos problemas

O aluno identifica problemas pertinentes ao tema selecionado. Problemas que englobe questões que ele mesmo enfrenta ou que considere socialmente relevantes.

etapa
4

Resolução dos problemas

O estudante procede à resolução dos desafios identificados, empregando suas habilidades matemáticas em conjunto com seus conhecimentos do mundo real ou sua capacidade criativa para solucionar os problemas apresentados.

etapa
5

Desenvolvimento da matemática relacionada ao tema

O aluno desenvolve a matemática relacionada ao tema, aprendendo novos conceitos matemáticos ou aplicando conceitos matemáticos que já conhece.

etapa
6

Análise crítica das soluções

O aluno analisa criticamente suas soluções. Ele pode verificar se as soluções são corretas, ou se estão completas ou coerentes com o problema.

Para ter certeza da consistência dos possíveis métodos a serem utilizados, os alunos podem testar primeiro as formas de medição em esboços menores.

Nessa etapa, os alunos devem ser concitados a montar um teodolito caseiro para servir de instrumento de medida dos ângulos na triangulação dos problemas escolhidos para resolução.

- **Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema**

Introdução ao modelo matemático:

Essa etapa é a mais sensível da atividade, pois demanda uma revisão detalhada de técnicas matemáticas voltadas para a medição de distâncias, centradas no triângulo, como as relações métricas do triângulo retângulo, a trigonometria básica e a semelhança entre triângulos.

Por ser um problema de natureza sofisticada, envolve conteúdos considerados difíceis para alguns alunos. Como a modelação envolve explorar novas possibilidades de formalizar regras e representações matemáticas ou conhecer a formação histórica de regras já consagradas na literatura matemática, os alunos podem realizar na fase de exploração uma pesquisa detalhada sobre as demonstrações do Teorema de Pitágoras e da Lei dos Cossenos.

Experimento prático e coleta de dados:

Após algumas aulas focadas no planejamento de estratégias para coleta de dados, os alunos saem à campo, estudam o terreno e selecionam um local seguro para realizar as medições estimadas e as medições precisas.

Aplicação do modelo aos dados coletados:

Após a coleta de dados, os alunos precisam de algumas aulas para aplicação dos modelos formalizados. Essa etapa envolve muitas reuniões, pois muitos alunos apresentam dificuldades de aprendizagem.

- **Avaliação da atividade:**

Descrição:

A avaliação da atividade pode ser feita de forma contínua, ao longo da atividade, e por meio da apresentação dos resultados. Leva-se em conta os registros dos alunos para verificar se eles compreenderam os conceitos matemáticos envolvidos.

Objetivo:

- Aplicar os modelos matemáticos Teorema de Pitágoras e Lei dos Cossenos para estimar a largura de uma represa, seguindo as etapas da modelagem matemática.

Conteúdos envolvidos:

- Relações métricas no triângulo retângulo;
- Razões trigonométricas;
- Lei dos Cossenos;
- Classificação de Ângulos;
- Proporcionalidade;

Recursos didáticos:

- Transferidos adaptado;
- Trena comum.

Etapas da modelagem para desenvolvimento da atividade:

Escolha do tema: modelagem matemática para estimar a largura de um rio.

Essa etapa foi muito importante, pois os alunos devem discutir uma forma de resolver problemas que criem oportunidade de conexão escola-comunidade. Estimar a medida de uma região de água (rio, represa, lagoa, parque) pode explorar melhor habilidades desenvolvidas na escola sobre contextos estimulantes.

• **Pesquisa exploratória**

Nessa etapa os alunos devem registrar fotos do Google maps para precisar as dimensões em escala do objeto de estudo e planejar as medições. Vale destacar, que dependendo do local escolhido, é necessário autorização para execução de uma atividade exploratória.

• **Levantamento do problema**

Após a pesquisa exploratória em torno de obras que envolvam a citação de técnicas para medição de distâncias inacessíveis, visitas ao local do objeto da atividade, os alunos devem delimitar o problema envolvendo medição: *como estimar a largura de um riacho com marcações triangulares em sua margem?*

Paras as etapas apresentadas, Burak (1992) estabelece princípios básicos que norteiam sua concepção de desenvolvimento de uma atividade em Modelagem Matemática:

Princípio 1: o interesse dos participantes que compõe o grupo que desenvolve a atividade de modelagem.

Nossas ações são fortemente motivadas pelo interesse. A Modelagem Matemática é uma proposta de desafio criativo, oportunidade de os alunos relembrem a matéria transmitida, se divertires integrando as teorias matemáticas aprendidas em sala, a curiosidade, e a integração de forças.

Princípio 2: envolvimento do grupo em busca de informações e dados do ambiente de interesse.

Para o autor, um processo de ensino-aprendizagem por meio da Modelagem sustenta-se nas teorias da cognição, constituídas, principalmente, por uma visão construtivista, sociointeracionista e de aprendizagem significativa, que consideram o estudante como um agente da construção do próprio conhecimento. Nessa visão o aluno é um buscador. Buscador de conhecimento, de novos campos, novas visões, que interroga, discute, reflete e forma suas convicções.

UM ESTUDO DE CASO

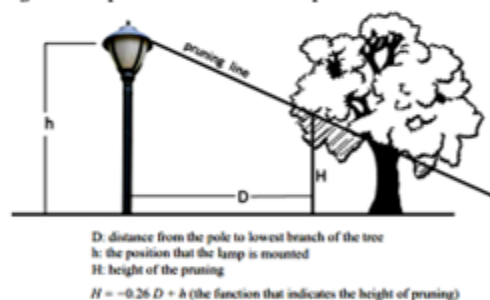
Almeida e da Silva (2015) trazem uma atividade registrada em *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* nas atas da conferência bienal ICTMA que envolve a aprendizagem baseada na resolução de problemas. Para o desenvolvimento da atividade os alunos tiveram que **definir um tema (etapa 1 em Burak)** para estudar em grupo em suas aulas de modelagem Matemática. Um aluno (Carlo) sugeriu:

Escolha do tema (etapa 1): "A rua da minha casa é meio escura; os vizinhos e eu achamos que há problemas com o tamanho das árvores e sua poda; poderíamos estudar algo sobre isso?"

A partir dessa ideia, os alunos **coletaram dados (etapa 2)** de sites e tiveram acesso ao Manual de Iluminação Pública da Companhia Paranaense de Energia (COPEL, 1998). Entre as informações fornecidas no Manual da Copel, os alunos encontraram uma referência à poda de árvores apresentada por uma imagem conforme a Figura 1 (ALMEIDA & DA SILVA, 2015).

Para realizar a poda da árvore, leva-se em consideração seu tamanho, a altura do poste próximo a ela (h), a distância (D) que a árvore está do poste e o tipo de lâmpada utilizada. Coletaram dados em ruas, próximo ao local onde as pessoas caminham à beira do lago. Considerando os dados coletados nas duas ruas, os alunos colocaram o **problema (etapa 3): Qual é o ponto de poda das árvores dessas ruas de acordo com o tipo de poste?**

Figura 1- Representando a altura da poda de árvores.



Fonte: Manual de Iluminação Pública - Copel (1998).



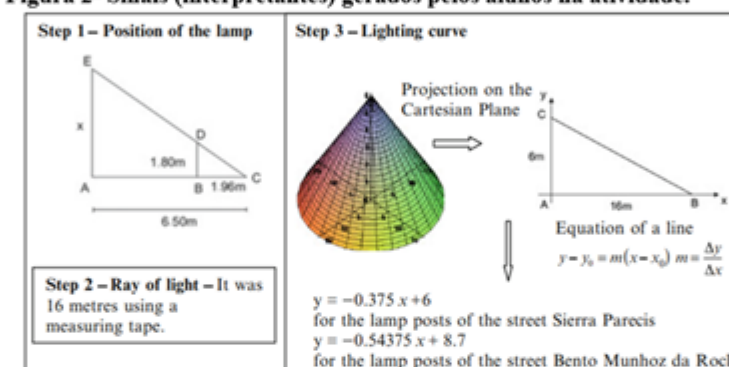
ATIVIDADE 2

Estimativa da largura de um rio: um desafio matemático.

Para resolver o problema proposto, o grupo de alunos teve que 'produzir' os dados necessários. A existência de diferentes tipos de postes de iluminação nas duas ruas exigiu que realizassem medições nos locais no que diz respeito à altura dos postes, altura das lâmpadas e tipos de árvores.

Uma abordagem Matemática do problema foi permeada pela geração de interpretantes a fim de obter uma solução. A relação entre o problema e os objetos matemáticos é mostrada na definição da atividade de desenvolvimento (**etapa 4**). Os alunos organizaram isso em três fases: a posição da lâmpada no poste, o raio da curva de iluminação e a iluminação, conforme mostrado na Figura 2.

Figura 2- Sinais (interpretantes) gerados pelos alunos na atividade.



Fonte: Almeida & da Silva (2015).

Para determinar a posição do poste, eles usaram semelhança de triângulos. Isso denota conhecimento matemático que auxilia na tomada de decisão para a resolução de um problema. Ao realizarem comentários sobre qual é a poda ideal e traçarem as equações no gráfico conforme a Figura 3, perceberam a importância de refinar a situação-problema (**etapa 5**) para tentar representá-la matematicamente por meio de um gráfico tridimensional, percebendo que "os modelos fornecem apenas aproximações do real comportamento" (D'Ambrosio 2009).

A atividade registrada por Almeida e da Silva *et al.* (2015) mostrou-se um grande desafio para os alunos após a análise dos resultados encontrados (**etapa 6**), mesmo para aqueles tiveram experiência anterior com Modelagem Matemática, pois o grupo teve a necessidade de coletar dados indo às ruas fazer medições de árvores e postes e, modelar os dados coletados na forma de gráficos e esboços, revelando que se por um lado, o termo "modelagem" foca na direção da **realidade** → **Matemática**, por outro lado e de forma mais geral, enfatiza os processos envolvidos (BLUM, 2002).

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS DE ATIVIDADES EM MODELAGEM MATEMÁTICA

As atividades de aprendizagem baseados nas etapas da Modelagem Matemática refletem uma forte sintonia com tendências preconizadas nas modernas Teorias da Aprendizagem. Em geral, o objetivo de uma aula de Matemática é aprendizagem: um processo sugerido pelas teorias da aprendizagem em que o sujeito da aula assimila conhecimentos ou habilidades, resultando em uma mudança de comportamento.

As atividades de aprendizagem em Modelagem Matemática possuem etapas que inserem o aluno além de uma prática abertamente instrumental. As necessidades envolvidas no objetivo das atividades mobilizam o aluno a exercitar o método matemático aprendido com o “significado do que faz”, “para que faz” e “onde pretende chegar com o que faz”, pois há um menor tempo debruçado na exposição professoral, e maior tempo em que o aluno “põe a mão na massa”, por meio da vivência de uma atividade ativa que exija de suas capacidades cognitivas.

As sequências didáticas das atividades desse capítulo foram aplicadas em um grupo focal da 3ª série da Escola Estadual Castelo Branco. Elas compuseram uma pesquisa de intervenção desenvolvida durante o programa de mestrado profissional da UEG.

- Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema

Introdução ao modelo matemático:

Para a iniciação a modelagem, os alunos devem manipular sob orientação do professor o GeoGebra, aprendendo comandos básicos que envolvam conhecimentos introdutórios de geometria analítica, como definir as orientações cartesianas, determinar a distância entre pontos, verificar a inclinação da reta, determinar o ponto de interseção entre duas retas, entre outros.

Experimento prático e coleta de dados:

Com o amadurecimento da interpretação gráfica da geometria analítica, que quase sempre é muito centrada na manipulação de fórmulas e regras matemáticas para o encontro das soluções, o objetivo central nessa fase introdutória de modelagem matemática é exatamente aprender a modelar geometricamente, explorando a geometria analítica do ponto de vista em que ela de fato foi desenvolvida.

Aplicação do modelo aos dados coletados e Desafios na aplicação

O desenvolvimento das etapas nessa fase inicial tem muitos desafios para aplicação de resolução de toda a lista de exercícios de questões do Exame Nacional do Ensino Médio baseado em modelagens matemáticas. Muitos alunos ainda são presos a fórmulas. Tem um manejo restrito com plano cartesiano. O ideal, para superar esses desafios, é estimular os alunos a ter uma visão realmente geométrica de cada questão do ENEM, desdobrando suas peculiaridades técnicas através das possibilidades do GeoGebra.

- Avaliação da atividade:

A avaliação pode ser realizada de forma contínua, durante toda a sua aplicação. Deve-se levar em consideração o trabalho em equipe, a organização nas etapas, a fidelidade ao argumento essencial: modelar geometricamente cada exercício proposto.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Objetivo:

- Aplicar os modelos matemáticos da Geometria Analítica para resolver questões do ENEM, usando o GeoGebra, desenvolvendo habilidades de modelagem matemática e promovendo a autonomia e a criatividade dos alunos.

Conteúdos envolvidos:

- Geometria analítica;
- Modelagem Matemática.

Recursos didáticos:

- Questões impressas;
- Acesso ao software GeoGebra.

Etapas da modelagem para desenvolvimento da atividade:

- **Escolha do tema:** Modelagem matemática com GeoGebra para resolver problemas de Geometria Analítica no ENEM

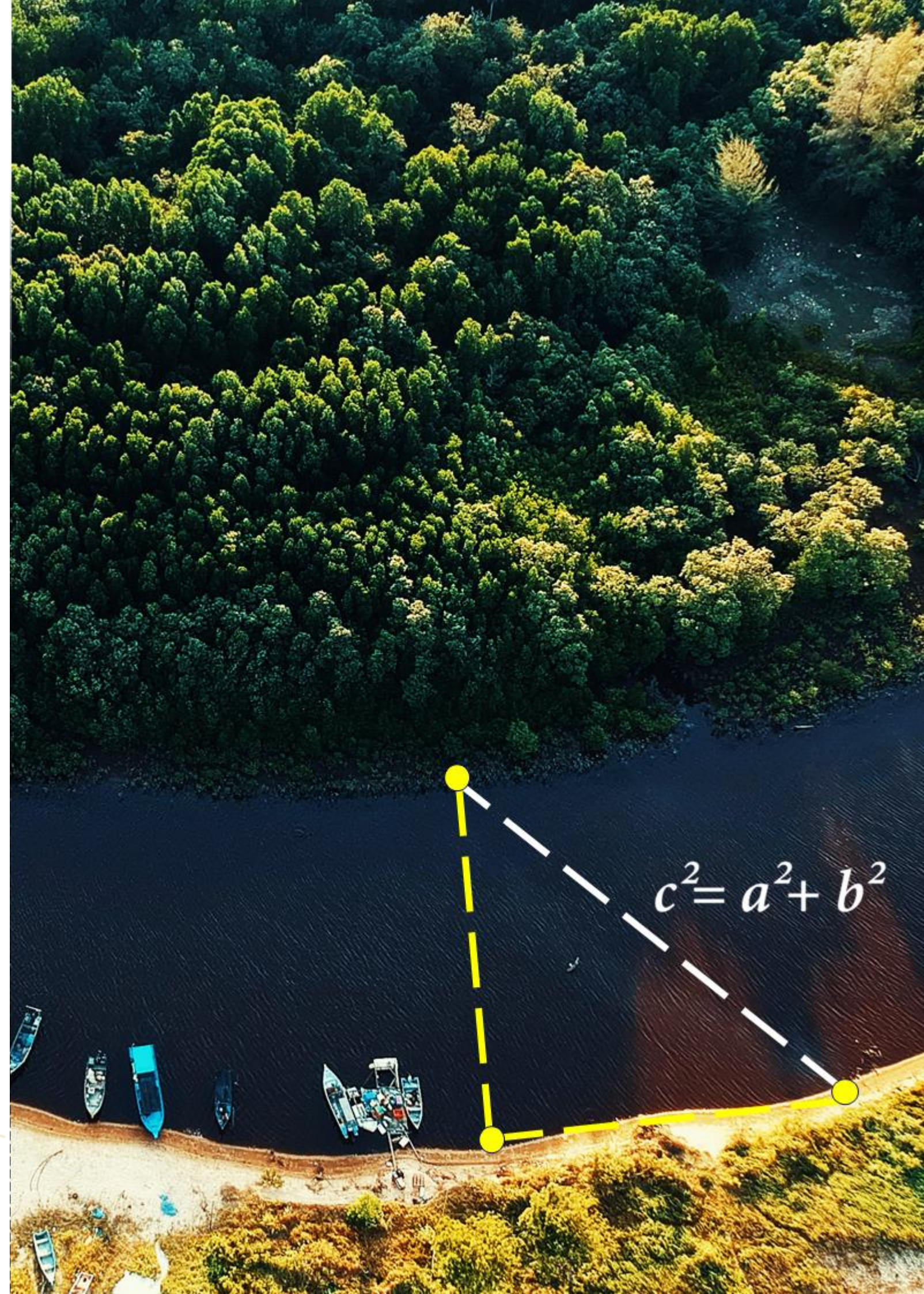
Geralmente, é bem comum alunos solicitarem atividades que envolvam tecnologias e aplicativos, ou seja, uma prática de ensino-aprendizagem que fuja do tradicional quadro e giz. Nessa fase o tema é organizado e proposto pelo professor seguindo as expectativas dos alunos por metodologias que tornem a aula interessante e envolvente.

- **Pesquisa exploratória**

Nessa os alunos devem realizar um estudo detalhado das questões propostas pelo professor.

- **Levantamento do problema**

Após alguns encontros o professor definiu o problema para os alunos: *como modelar soluções para algumas questões previamente selecionadas de Geometria Analítica do ENEM?*



ATIVIDADE 1

**Modelagem
matemática no
GeoGebra: uma
abordagem para
resolver questões
do ENEM.**